数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔１〕 $x \geqq 2$，$y \geqq 2$，$8 \leqq xy \leqq 16$ のとき，$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。

$s = \log_2 x$，$t = \log_2 y$ とおくと，s，t，$s + t$ のとり得る値の範囲はそれぞれ

$$s \geqq \boxed{\text{ア}},\quad t \geqq \boxed{\text{ア}},\quad \boxed{\text{イ}} \leqq s + t \leqq \boxed{\text{ウ}}$$

となる。また

$$z = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} s + t$$

が成り立つから，z は $s = \boxed{\text{カ}}$，$t = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。したがって，z は $x = \boxed{\text{コ}}$，$y = \boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。

（数学Ⅱ第１問は６ページに続く。）

〔2〕 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たす θ について考えよう。

方程式$(*)$を $\sin\theta$ を用いて表すと

$$\boxed{\text{シ}}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \boxed{\text{ス}} = 0$$

となる。したがって，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす θ のうち，小さい方を θ_1，大きい方を θ_2 とすると

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}},\quad \cos\theta_2 = \frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

θ_1 について不等式 $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{12}$　① $\frac{\pi}{12} < \theta_1 < \frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{\pi}{5}$

③ $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$　④ $\frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$　⑤ $\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$

ただし，必要ならば，次の値

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい。

さらに，不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

第2問 (配点 30)

放物線 $y = 2x^2$ を C，点$(1,\ -2)$をAとする。

点 Q$(u,\ v)$に関して，点Aと対称な点を P$(x,\ y)$とすると

$$u = \frac{x + \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad v = \frac{y - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ。Qが C 上を動くときの点Pの軌跡を D とすると，D は放物線

$$y = x^2 + \boxed{\text{オ}}\,x + \boxed{\text{カ}}$$

である。

二つの放物線 C と D の交点をRとSとする。ただし，x 座標の小さい方をRとする。点R，Sの x 座標はそれぞれ $\boxed{\text{キク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ で，点R，Sにおける放物線 D の接線の方程式はそれぞれ

$$y = \boxed{\text{コ}},\quad y = \boxed{\text{サ}}\,x - \boxed{\text{シ}}$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

Pを放物線D上の点とし，Pのx座標をaとおく。Pからx軸に引いた垂線と放物線Cとの交点をHとする。$\boxed{\text{キク}} < a < \boxed{\text{ケ}}$のとき，三角形PHRの面積$S(a)$は

$$S(a) = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}\,a^3 + a^2 + \boxed{\text{ソ}}\,a + \boxed{\text{タ}}\right)$$

と表される。$S(a)$は$a = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$のとき，最大値をとる。

$a = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$のとき，直線HRと放物線$D$の交点のうち，Rと異なる点の$x$座標は$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$である。このとき，$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$の範囲で，放物線$D$と直線PHおよび直線HRで囲まれた図形の面積は$\dfrac{\boxed{\text{ナニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$である。

第３問 （配点　20）

座標平面において，原点Oを中心とする半径１の円 C_1 上の２点P，Qに対して，線分PQ上の点NをPN：NQ＝４：１となるようにとる。ただし，PとQが一致するときは，NはP，Qと同じ点とする。

(1) 点P，Qの座標をそれぞれ$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$(\cos\beta,\ \sin\beta)$とする。ここで，$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$0 \leqq \beta < 2\pi$とする。このとき，点Nの座標$(X,\ Y)$は

$$X = \frac{\cos\alpha + \boxed{\text{ア}}\cos\beta}{\boxed{\text{イ}}},\quad Y = \frac{\sin\alpha + \boxed{\text{ウ}}\sin\beta}{\boxed{\text{エ}}}$$

で与えられ

$$X^2 + Y^2 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\cos(\alpha - \beta) + \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

となるので，点P，Qを円 C_1 上で動かすとき，$X^2 + Y^2$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}} \leqq X^2 + Y^2 \leqq 1$$

である。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

(2) 点P，Qを円 C_1 上で動かしたとき，点Nは不等式

$$\frac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}} \leqq x^2 + y^2 \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が表す領域全体を動くことを示そう。

点Q$(\cos\beta,\ \sin\beta)$を固定し，点Pを C_1 上で1周させたとき，点Nの軌跡は，点

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\cos\beta,\ \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\sin\beta\right)$$

を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ の円 C_2 である。

さらに，点Qを C_1 上で1周させたとき，Tは原点を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ の円上を1周する。したがって，点Qを C_1 上で1周させたとき，円 C_2 が通過してできる図形は，上の不等式$(*)$が表す領域と一致する。

第４問 （配点　20）

$P(x)$を３次の整式とし，a，b，cは実数であり，$a \neq 0$とする。$P(x)$を$5ax^2 - bx + c$で割ったとき，商は$-x+2$で，余りは$2x-4$であるとする。

(1)　$P(x)$は$x - \boxed{ア}$で割り切れる。その商は

$$\boxed{イウエ}x^2 + \boxed{オ}x - \boxed{カ} + \boxed{キ}$$

である。

また，$P(x)$を$(5x-2)(x-1)$で割ったときの余りが$4x$であるとすると，bとcはaを用いて

$$b = \boxed{ク}a - \boxed{ケ}, \quad c = \boxed{コ}a + \boxed{サ}$$

と表される。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

以下では $b = \boxed{\text{ク}}a - \boxed{\text{ケ}}$，$c = \boxed{\text{コ}}a + \boxed{\text{サ}}$ とする。

(2)　3次方程式 $P(x) = 0$ が0と異なる三つの解をもつとき，それら三つの解の逆数の和は a を用いて表すと

$$4 - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}a - \boxed{\text{セ}}}$$

である。

(3)　3次方程式 $P(x) = 0$ の一つの解の逆数が $1 + ki$（k は正の実数）であるとする。このとき，三つの解の逆数の和は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，a の値は $\boxed{\text{チ}}$ となる。したがって，k の値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。