数学Ⅱ・数学Ｂ

<table>
<tr><th>問　題</th><th>選　択　方　法</th></tr>
<tr><td>第１問</td><td>必　　答</td></tr>
<tr><td>第２問</td><td>必　　答</td></tr>
<tr><td>第３問</td><td rowspan="4">いずれか２問を選択し，解答しなさい。</td></tr>
<tr><td>第４問</td></tr>
<tr><td>第５問</td></tr>
<tr><td>第６問</td></tr>
</table>

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕　連立方程式

$$(*)\begin{cases} xy = 128 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす正の実数x，yを求めよう。ただし，$x \neq 1$，$y \neq 1$とする。①の両辺で2を底とする対数をとると

$$\log_2 x + \log_2 y = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ。これと②より

$$(\log_2 x)(\log_2 y) = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は 2 次方程式

$$t^2 - \boxed{\text{エ}}\,t + \boxed{\text{オカ}} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の解である。③の解は $t = \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ は解答の順序を問わない。よって，連立方程式(＊)の解は $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$ または $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\sin 4\theta = \cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に，すべての x について

$$\cos x = \sin\left(\boxed{\text{シ}} - x\right)$$

である。 $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ π　　　① $\frac{\pi}{2}$　　　② $-\frac{\pi}{2}$

したがって，①が成り立つとき，$\sin 4\theta = \sin\left(\boxed{\text{シ}} - \theta\right)$ となり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{\text{シ}} - \theta$ のとり得る値の範囲を考えれば，$4\theta = \boxed{\text{シ}} - \theta$ または $4\theta = \pi - \left(\boxed{\text{シ}} - \theta\right)$ となる。よって，①を満たす θ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ または $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ の値を求めよう。① より

$$\boxed{\text{ツ}}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos\theta$$

となり，この式の左辺を 2 倍角の公式を用いて変形すれば

$$\left(\boxed{\text{テ}}\sin\theta - \boxed{\text{ト}}\sin^3\theta\right)\cos\theta = \cos\theta$$

となる。ここで $\cos\theta > 0$ であるから

$$\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta - \boxed{\text{テ}}\sin\theta + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つ。$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ は ② を満たしている。$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ とすると，$\sin\theta \neq \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であるから

$$\boxed{\text{ナ}}\sin^2\theta + \boxed{\text{ニ}}\sin\theta - 1 = 0$$

となる。ここで，$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}} = \frac{\boxed{\text{ヌネ}} + \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

第2問 （必答問題）（配点 30）

k を実数とし，座標平面上に点 P(1, 0) をとる。曲線

$$y = -x^3 + 9x^2 + kx$$

を C とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(t,\ -t^3 + 9t^2 + kt)$ における曲線 C の接線が点 P を通るとすると

$$-\boxed{\text{ア}}\,t^3 + \boxed{\text{イウ}}\,t^2 - \boxed{\text{エオ}}\,t = k$$

が成り立つ。

$$p(t) = -\boxed{\text{ア}}\,t^3 + \boxed{\text{イウ}}\,t^2 - \boxed{\text{エオ}}\,t$$

とおくと，関数 $p(t)$ は $t = \boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとり，$t = \boxed{\text{ケ}}$ で極大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

したがって，点 P を通る曲線 C の接線の本数がちょうど2本となるのは，k の値が $\boxed{\text{サ}}$ または $\boxed{\text{シス}}$ のときである。また，点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k = 5$ のとき $\boxed{\text{セ}}$ 本，$k = -2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 本，$k = -12$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 本となる。

（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

(2) $k=0$ とする。曲線

$$y=-x^3+6x^2+7x$$

を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は $\boxed{\text{チ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，2曲線 C，D および2直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた二つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第3問 (選択問題) (配点 20)

自然数の列 1, 2, 3, 4, … を, 次のように群に分ける。

1	2, 3, 4, 5	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	…
第1群	第2群	第3群	

ここで, 一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n で表す。

(1) $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=12$, $a_4=\boxed{\text{アイ}}$ である。

$$a_n-a_{n-1}=\boxed{\text{ウ}}\,n-\boxed{\text{エ}}\quad(n=2,3,4,\cdots)$$

が成り立ち

$$a_n=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n^{\boxed{\text{キ}}}-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

である。

よって, 600 は, 第 $\boxed{\text{コサ}}$ 群の小さい方から $\boxed{\text{シス}}$ 番目の項である。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対し，第$(n+1)$群の小さい方から $2n$ 番目の項を b_n で表すと

$$b_n=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^{\boxed{\text{タ}}}+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}n$$

であり

$$\frac{1}{b_n}=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

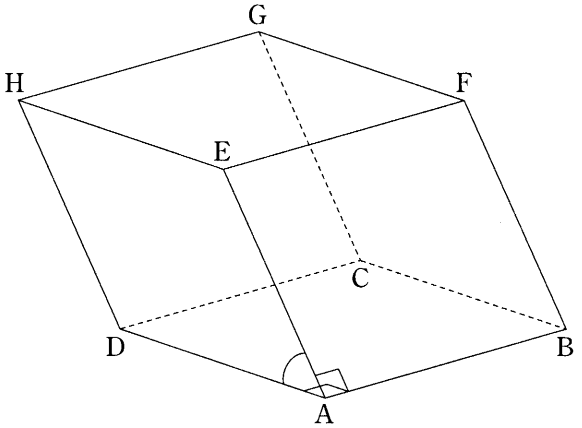
が成り立つ。これより

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{\text{ニ}}\,n}{\boxed{\text{ヌ}}\,n+\boxed{\text{ネ}}}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

となる。

第4問 (選択問題) (配点 20)

二つずつ平行な三組の平面で囲まれた立体を平行六面体という。辺の長さがすべて1の平行六面体 ABCD−EFGH があり，$\angle \mathrm{EAB} = \angle \mathrm{DAB} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{EAD} = \dfrac{\pi}{3}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{r}$ とおく。



$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ とする。辺 AB を $a : (1-a)$ の比に内分する点を X，辺 BF を $b : (1-b)$ の比に内分する点を Y とする。点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする。三角形 XYZ を含む平面を α とする。

(1) $\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot \vec{r} = \boxed{\text{ア}}$，$\vec{q} \cdot \vec{r} = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ は，a，b，$\vec{p}$，$\vec{r}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{XY}} = \left(1 - \boxed{\text{エ}}\right)\vec{p} + \boxed{\text{オ}}\,\vec{r}$ と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{EC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XZ}} = \boxed{\text{カ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

(2) 直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし，交点を K とする。$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ が三角形 XYZ の 2 辺と垂直であることから，$\boxed{\text{キ}}\,a + b = \boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

以下では，$b = \dfrac{1}{2}$ とする。このとき $a = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{EK}}$ を実数 c を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EK}} = c\,\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ である。一方，点 K は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{AX}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{XY}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{XZ}}\\ &= \left(\frac{1}{\boxed{\text{サ}}}s + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)\vec{p} + t\,\vec{q} + \left(\frac{1}{\boxed{\text{シ}}}s + t\right)\vec{r}\end{aligned}$$

と表される。これらより，$c = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって，点 E と平面 α との距離 $\left|\overrightarrow{\mathrm{EK}}\right|$ は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となる。

第5問 (選択問題) (配点 20)

次の表は，高等学校のある部に入部した20人の生徒について，右手と左手の握力(単位kg)を測定した結果である。測定は10人ずつの二つのグループについて行われた。ただし，表中の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

第1グループ

番号	右手の握力	左手の握力	左右の握力の平均値
1	50	49	49.5
2	52	48	50.0
3	46	50	48.0
4	42	44	43.0
5	43	42	42.5
6	35	36	35.5
7	48	49	48.5
8	47	41	44.0
9	50	50	50.0
10	37	36	36.5
平均値	A	44.5	44.75
中央値	46.5	46.0	
分　散	29.00	27.65	

第2グループ

番号	右手の握力	左手の握力	左右の握力の平均値
11	31	34	32.5
12	33	31	32.0
13	48	44	46.0
14	42	38	40.0
15	51	45	48.0
16	49	B	E
17	39	33	36.0
18	45	41	43.0
19	45	C	F
20	47	42	44.5
平均値	43.0	D	41.25
中央値	45.0	40.5	
分　散	41.00	26.25	

以下，小数の形で解答する場合は，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合は，指定された桁まで⓪にマークすること。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(1) 第1グループに属する10人の右手の握力について，平均値Aは $\boxed{アイ}$．$\boxed{ウ}$ kgである。

また，20人全員の右手の握力について，平均値 M は $\boxed{エオ}$．$\boxed{カ}$ kg，中央値は $\boxed{キク}$．$\boxed{ケ}$ kgである。

(2) 右手の握力について，20人全員の平均値 M からの偏差の2乗の和を，二つのグループそれぞれについて求めると，第1グループでは $\boxed{コサシ}$ であり，第2グループでは420である。したがって，20人全員の右手の握力について，標準偏差 S の値は $\boxed{ス}$．$\boxed{セ}$ kgである。

(3) t を正の実数とする。20人全員の右手の握力の平均値 M と標準偏差 S を用いて，$M - tS$ より大きく $M + tS$ より小さい範囲を考える。

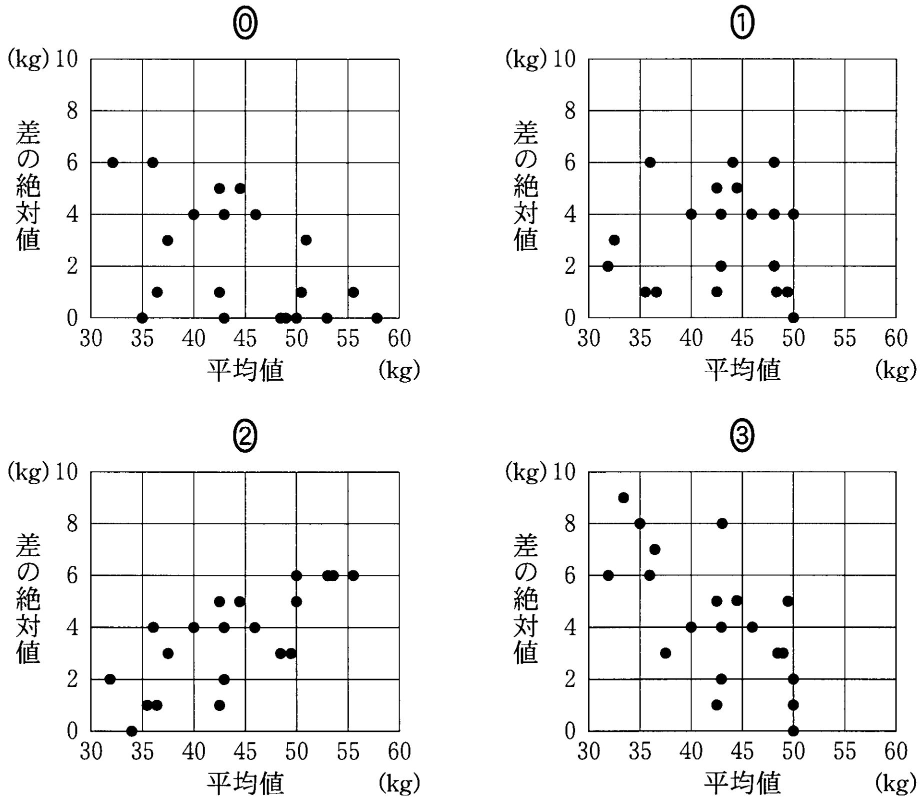
20人全員の中で，右手の握力の値がこの範囲に入っている生徒の人数を $N(t)$ とするとき，$N(1) = \boxed{ソタ}$ であり，$N(2) = \boxed{チツ}$ である。

(4) 第2グループに属する10人の左手の握力について，平均値Dは $\boxed{テト}$．$\boxed{ナ}$ kgであり，中央値が40.5kgであるから，Bの値は $\boxed{ニヌ}$ kg，Cの値は $\boxed{ネノ}$ kgである。ただし，Bの値はCの値より大きいものとする。これより，EとFの値も定まる。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(5) 20人の各生徒について，右手と左手の握力の平均値と，右手と左手の握力の差の絶対値を求めた。握力の平均値については，最初にあげた表の「左右の握力の平均値」の列に示している。

握力の平均値を横軸に，握力の差の絶対値を縦軸にとった相関図(散布図)として適切なものは $\boxed{\text{ハ}}$ であり，相関係数の値は $\boxed{\text{ヒ}}$ に最も近い。したがって，この20人については，$\boxed{\text{フ}}$ 。$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。



(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ －0.9　① －0.5　② 0.0　③ 0.5　④ 0.9

$\boxed{\text{フ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 握力の平均値が増加するとき，握力の差の絶対値が増加する傾向が認められる

① 握力の平均値が増加するとき，握力の差の絶対値が増加する傾向も減少する傾向も認められない

② 握力の平均値が増加するとき，握力の差の絶対値が減少する傾向が認められる

第6問 （選択問題）（配点　20）

自然数Nを三つの自然数a，b，cの和として表す方法の総数を求める。ただし，a，b，cは$a \leqq b \leqq c$を満たすとする。

次のように考えよう。まず，aのとり得る値の範囲を求め，次に，その範囲にあるaの各値について，$a+b+c=N$となる自然数b，c（$a \leqq b \leqq c$）の組を数える。

(1)　$a \leqq b \leqq c$より，aのとり得る値は$\dfrac{N}{\boxed{\text{ア}}}$以下のすべての自然数である。

(2)　$N=20$とする。このとき，aのとり得る最大の数は$\boxed{\text{イ}}$であり，さらに，$a=3$のとき，b，c（$3 \leqq b \leqq c$）の組は全部で$\boxed{\text{ウ}}$個である。

（数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。）

(3) 自然数 N を三つの自然数 a, b, c $(a \leqq b \leqq c)$ の和として表す方法の総数を求めるため，以下のような〔プログラム〕を作成した。ただし，INT(X) はXを超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム〕

```
100 INPUT N
110 LET X=0
120 FOR A=1 TO INT(N/ [ ア ])
130    LET [ エ ]
140 NEXT A
150 PRINT "N=";N;"のとき，総数は";X;"通りである"
160 END
```

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤の中から一つ選べ。

⓪ X=X+1
① X=X+INT(A/2)-1
② X=X+A+3
③ X=X+2*INT(A/2)+3
④ X=X+INT((N-A)/2)-2
⑤ X=X+INT((N-A)/2)-A+1

〔プログラム〕を実行して，N に 13 を入力したとき，130 行は $\boxed{\text{オ}}$ 回実行され，150 行で出力される X の値は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(4) 一般に，三つの正の数について，どの二つの数の和も残りの数より大きければ，それらを三辺の長さとする三角形が存在する。逆に，すべての三角形において，どの二辺の長さの和も残りの一辺の長さより大きい。

この事実を用いて，自然数 N を三角形の三辺の長さとなり得る三つの自然数 a，b，c $(a \leqq b \leqq c)$ の和として表す方法をすべて列挙し，その総数を求める。そのためには，(3)の〔プログラム〕の 130 行を削除して，次の 131 行～ 137 行を追加すればよい。

```
131    FOR B= ク
132       LET C= ケ
133       IF  コ  THEN
134          PRINT "(";A;",";B;",";C;")"
135          LET  サ
136       END IF
137    NEXT B
```

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

ク に当てはまるものを，次の⓪～⑤の中から一つ選べ。

⓪ 1 TO INT(N/2)
① 1 TO INT((N-A)/2)
② A TO N
③ A TO N-1
④ A TO INT((N-A)/2)
⑤ A TO INT((N-A)/2)+1

ケ に当てはまるものを，次の⓪～⑤の中から一つ選べ。

⓪ B
① B+A
② B-A
③ N-B
④ N-A-B
⑤ N+A-B

コ に当てはまるものを，次の⓪～⑤の中から一つ選べ。

⓪ A＜B+C
① B＜A+C
② C＜A+B
③ A＜B+C+1
④ B＜A+C+1
⑤ C＜A+B+1

サ に当てはまるものを，次の⓪～⑤の中から一つ選べ。

⓪ X=X+INT(N/2)
① X=X+INT(N/3)
② X=X+INT(A/2)+1
③ X=X+A-1
④ X=X+A
⑤ X=X+1

変更後のプログラムを実行して，N に 13 を入力したとき，150 行で出力される X の値は シ である。