数　学　I

（全　問　必　答）

第1問　（配点　25）

〔1〕 $A = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$，　$B = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ とする。

このとき

$$AB = \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - \boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{6} - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり，また

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$$

である。以上により

$$A + B = \frac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

（数学 I 第1問は次ページに続く。）

〔2〕 a を定数とし，二つの不等式

$|2x+13| \geqq 3$ ………… ①

$x^2 - 2ax + 2a^2 + 10a + 15 \leqq 0$ ………… ②

を考える。

下の $\boxed{\text{タ}}$ には，次の⓪〜③のうちから当てはまるものを一つ選べ。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$

不等式 ① の解は

$x \leqq \boxed{\text{クケ}}$, $\boxed{\text{コサ}} \leqq x$

であり，これと次の 2 次不等式

$x^2 + \boxed{\text{シス}}\,x + \boxed{\text{セソ}}\ \boxed{\text{タ}}\ 0$

の解は一致する。

次に，不等式 ② を満たす実数 x が存在するような a の値の範囲は

$\boxed{\text{チツ}} - \sqrt{\boxed{\text{テト}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{チツ}} + \sqrt{\boxed{\text{テト}}}$

であり，この範囲にある最小の整数は $\boxed{\text{ナニ}}$ である。

$a = \boxed{\text{ナニ}}$ のとき，二つの不等式 ① と ② をともに満たす x の値の範囲は

$\boxed{\text{ヌネ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ノハ}}$

である。

第2問 （配点　25）

座標平面上にある点Pは，点A$(-8,\ 8)$から出発して，直線$y=-x$上をx座標が1秒あたり2増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点Qは，点PがAを出発すると同時に原点Oから出発して，直線$y=10x$上をx座標が1秒あたり1増加するように一定の速さで動く。出発してからt秒後の2点P，Qを考える。点PがOに到達するのは$t=$ $\boxed{\text{ア}}$ のときである。以下，$0<t<$ $\boxed{\text{ア}}$ で考える。

(1)　点Pとx座標が等しいx軸上の点をP′，点Qとx座標が等しいx軸上の点をQ′とおく。△OPP′と△OQQ′の面積の和Sをtで表せば

$$S=\boxed{\text{イ}}\,t^2-\boxed{\text{ウエ}}\,t+\boxed{\text{オカ}}$$

となる。これより$0<t<$ $\boxed{\text{ア}}$ においては，$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ でSは最小値

$\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとる。

（数学Ⅰ第2問は次ページに続く。）

次に，a を $0 < a <$ $\boxed{\text{ア}}$ $- 1$ を満たす定数とする。以下，$a \leqq t \leqq a + 1$ における S の最小・最大について考える。

(i) S が $t = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小となるような a の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(ii) S が $t = a$ で最大となるような a の値の範囲は $0 < a \leqq \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2) 3 点 O，P，Q を通る 2 次関数のグラフが関数 $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものになるのは，$t = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときであり，x 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ だけ平行移動すればよい。

第３問 （配点　30）

$\triangle$ABCにおいて $\mathrm{AB} = 6$，$\mathrm{BC} = 2\sqrt{7}$，$\mathrm{CA} = 4$ とする。$\angle$A の二等分線と辺BCとの交点をD，$\angle$A の二等分線と$\triangle$ABCの外接円との点Aと異なる交点をEとする。辺ACの延長と，２点B，Eを通る直線の交点をPとする。

(1)　$\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であるから，$\angle\mathrm{BAC} = \boxed{\text{カキ}}^\circ$ である。

(2)　点Eから辺BCに引いた垂線と辺BCとの交点をHとすると，
$\angle\mathrm{ECH} = \boxed{\text{クケ}}^\circ$，$\angle\mathrm{EBH} = \boxed{\text{コサ}}^\circ$ であるから，$\mathrm{HC} = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。したがって，$\mathrm{CE} = \dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

（数学Ｉ第３問は次ページに続く。）

(3) $\triangle$ABP において

$$\angle \mathrm{APB} = 180^\circ - \angle \mathrm{BAP} - (\angle \mathrm{CBP} + \angle \mathrm{ABC}) = \boxed{\text{チツ}}^\circ - \angle \mathrm{ABC}$$

である。したがって，$\sin\angle \mathrm{APB} = \dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

(4) $\triangle$ECP において，$\sin\angle \mathrm{CEP} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であるから，$\mathrm{CP} = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第4問 (配点 20)

a，b は $a>0$，$b \leqq 0$ である定数とし，t の2次方程式

$$t^2+4at+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。方程式①を $\left(t+\boxed{\text{ア}}\,a\right)^2=\boxed{\text{イ}}\,a^2-b$ と書き直す。

$b \leqq 0$ であるから，方程式①の実数解は

$$t=\boxed{\text{ウエ}}\,a \pm \sqrt{\boxed{\text{オ}}\,a^2-b}$$

である。

(数学 I 第4問は次ページに続く。)

方程式①と同じ a, b に対して, x の方程式

$$(x-2)^2+4a|x-2|+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。

(1) $b=0$ の場合, 方程式①の解は $t=\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キク}}\,a$ である。このとき, 方程式②の実数解の個数は $\boxed{\text{ケ}}$ 個である。

(2) $b<0$ の場合, 方程式①の 0 以上である実数解は

$$t=\boxed{\text{ウエ}}\,a+\sqrt{\boxed{\text{オ}}\,a^2-b}$$

である。このとき, 方程式②の実数解の個数は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。