数　学　I

（全　問　必　答）

第１問　（配点　25）

〔１〕　$a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$，$b = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ とおく。

(1)　$ab = \boxed{\text{ア}}$

$a + b = \boxed{\text{イ}}\left(\boxed{\text{ウエ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)$

$a^2 + b^2 = \boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\right)$

である。

(2)　$ab = \boxed{\text{ア}}$ と $a^2 + b^2 + 4(a+b) = \boxed{\text{ケコ}}$ から，a は

$a^4 + \boxed{\text{サ}}\,a^3 - \boxed{\text{シス}}\,a^2 + \boxed{\text{セ}}\,a + \boxed{\text{ソ}} = 0$

を満たすことがわかる。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

〔2〕 下の $\boxed{タ}$, $\boxed{テ}$, $\boxed{ネ}$, $\boxed{ノ}$, $\boxed{ヒ}$ には，次の⓪～③のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$

a を定数とし，連立不等式

$$\begin{cases} x - 6a \geqq -1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ |x + a - 1| < 5 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。

(1) $x = 1$ が不等式 ① を満たすような a の値の範囲を表す不等式は

$a\ \boxed{タ}\ \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

(2) $x = 2$ が不等式 ① を満たさないような a の値の範囲を表す不等式は

$a\ \boxed{テ}\ \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ である。

(3) $a = 0$ のとき，連立不等式 ①，② の解は

$\boxed{ニヌ}\ \boxed{ネ}\ x\ \boxed{ノ}\ \boxed{ハ}$

である。

(4) 不等式 ② の解と，連立不等式 ①，② の解とが一致するような a の値の範囲を表す不等式は $a\ \boxed{ヒ}\ \dfrac{\boxed{フヘ}}{\boxed{ホ}}$ である。

第２問 （配点　25）

a を定数とし，x の２次関数

$$y = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36 \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エオ}}\right)$$

である。G と y 軸との交点の y 座標を p とする。

(1) $p = -27$ のとき，a の値は $a = \boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ である。$a = \boxed{\text{カ}}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{コ}}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{\text{キク}}$ のときの ① のグラフに一致する。

（数学Ｉ第２問は次ページに続く。）

(2) 下の $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ノ}}$, $\boxed{\text{ハ}}$ には，次の⓪～③のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$

G が x 軸と共有点を持つような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{\text{サシ}}\ \boxed{\text{ス}}\ a\ \boxed{\text{セ}}\ \boxed{\text{ソ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。a が ② の範囲にあるとき，p は，$a = \boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チツテ}}$ をとり，$a = \boxed{\text{ト}}$ で最大値 $\boxed{\text{ナニ}}$ をとる。

G が x 軸と共有点を持ち，さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{\text{ヌネ}}\ \boxed{\text{ノ}}\ a\ \boxed{\text{ハ}}\ \frac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

第3問 (配点 30)

$\triangle$ABCは，AB $= 4$，BC $= 2$，$\cos\angle$ABC $= \dfrac{1}{4}$ を満たすとする。このとき

$$\mathrm{CA} = \boxed{\text{ア}}, \quad \sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$\triangle$ABCの外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

$\triangle$ABCの外接円と$\angle$ABCの二等分線との交点でBと異なる点をDとし，直線ADと直線BCの交点をEとする。このとき，$\triangle$ACEの内角$\angle$CAEと外角$\angle$ACBの間には$\angle\mathrm{CAE} = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\angle\mathrm{ACB}$の関係があるので，CE $= \boxed{\text{シ}}$ である。したがって，AE $= \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(数学 I 第3問は次ページに続く。)

△ACE と△ADC を比較することにより，△ACE の面積は△ADC の面積の $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ 倍であることと，$\mathrm{AD} = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であることがわかる。

以上から，△ADC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第4問 (配点　20)

絶対値を含んだ不等式

$$2|x^2+2x-3|-3|x-1|>2x+3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を満たす x の値の範囲を求める。

2次方程式 $x^2+2x-3=0$ の解は $x=\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ であるから，調べる x の値の範囲を

$$x<\boxed{\text{アイ}},\quad \boxed{\text{アイ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{ウ}},\quad \boxed{\text{ウ}}<x$$

の三つの場合に分ける。

- $x<\boxed{\text{アイ}}$ の場合

  絶対値記号をはずして整理すると，不等式①は

  $$2x^2+\boxed{\text{エ}}\,x-\boxed{\text{オカ}}>0$$

  となるから，求める x の値の範囲は $x<\boxed{\text{キク}}$ である。

(数学 I 第4問は次ページに続く。)

- $\boxed{アイ} \leqq x \leqq \boxed{ウ}$ の場合

  ① を満たす x の値の範囲は $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}} < x < \boxed{シ}$ である。

- $\boxed{ウ} < x$ の場合

  ① を満たす x の値の範囲は $\boxed{ス} < x$ である。

以上の場合を合わせて考えると，不等式 ① を満たす整数 x は無限に多くあるが，不等式 ① を満たさない整数 x の個数は $\boxed{セ}$ 個であることがわかる。